2026 年江苏省大学生程序设计竞赛暨广东省大学生程序设计竞赛 题解

电子科技大学

UESTC

2026 年 5 月 17 日

概况

- Easy: C,I
- Easy-Medium: A,B,F,L
- Medium: H,J,K
- Medium-Hard: D,E
- Hard: G

Problem I - 聪明猪的考验

题目大意

给你两个字符串，输出长度为 2 的所有公共子序列中字典序最小的那个。

- 暴力枚举所有可能的长度为 2 的字符对，并判断它是否在两个字符串里都出现过。
- 时间复杂度 $\mathcal{O}(26^2 \times \sum n)$，足够通过本题。

Problem C - 二进制串

题目大意

给出一个二进制串，构造出一种添加运算符的方案使得答案为 0。

- 如果输入中存在 0，那么我们可以一直使用按位与运算。
- 如果输入全是 1，由于按位与优先级高于按位异或，在第一个运算符位置插入按位异或，其余位置都插入按位与，即可得到 0：

$$1 \oplus 1 \wedge 1 \wedge \cdots \wedge 1 = 0$$

Problem B - 梦中星河

题目大意

给定非负整数 x，求三个非负整数 a, b, c 满足 $a \times b + c = x$，并使得 $\max(a, b, c) - \min(a, b, c)$ 尽可能小。输出该最小值。

Problem B - 梦中星河

- 当 $x = 0$ 时取 $a = b = c = 0$，极差为 0。
- 而 a, b 均接近 $\sqrt{x}$ 时 c 很小，三者容易集中在一个短区间内。可以证明最小极差 $D = \mathcal{O}(x^{1/4})$。
- 令 $d = \lceil 2x^{1/4} \rceil$，$m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$，$M = m + 1$。

Problem B - 梦中星河

极差上界的证明:

- 若 $x \le m^2 + m + d$:取 $a = m - t$,$b = m + t$,$c = x - (m^2 - t^2)$,$t = 0, 1, \ldots, d$。由离散介值定理可知存在某个 t 使得 a, b, c 均落在 $[m - d, m + d]$ 内,极差 $\le 2d$。
- 若 $x > m^2 + m + d$:此时 x 靠近 $(m+1)^2$。设 $r = (m+1)^2 - x$,取 $a = M - t$,$b = M + t$,$c = t^2 - r$,$t = \lceil \sqrt{r} \rceil, \ldots, d$。类似可证存在 t 使得三个数均在 $[M - d, M + d]$ 内,极差 $\le 2d$。

综上,总存在解使极差 $\le 2d \le 4x^{1/4}$(对 $x \ge 1$)。
因此只需在 $\sqrt{x}$ 附近 $\mathcal{O}(x^{1/4})$ 范围内枚举 $b - a$ 即可找到最优解。经验证最大答案为 354,$T \le 10^5$ 时可在时限内通过。

Problem A - 舞者僵尸

题目大意

有 n 个初始僵尸，第 i 个在时刻 a_i 出现在位置 b_i。每个僵尸出现后，每秒向左右相邻整数点各召唤一个僵尸（新僵尸同理）。求最少秒数，使得数轴上整数区间 $[0, k]$ 内每个点都至少有一个僵尸。

Problem A - 舞者僵尸

- 二分答案 T，判定能否在 T 秒内覆盖 $[0, k]$。
- 收集所有满足 $a_i \le T$ 的僵尸，其覆盖区间为

$$[L, R] = [b_i - (T - a_i),\ b_i + (T - a_i)]$$

- 将这些区间按左端点排序，合并后检查是否能完全覆盖 $[0, k]$。
- 注意整数点覆盖要求相邻区间左端点 $\le$ 当前右端点 $+1$。
- 时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n \log k)$。
- 另一种 $\mathcal{O}(n)$ 做法：
  - 将可以完全被其他舞王覆盖的无效舞王删除。
  - 直接计算每两个相邻有效舞王相接的时间取最大值即可。

Problem F - 进行一个数的数

题目大意

给定一个长度为 n 的数组 b（由原数组 a 对某个正整数 m 取模得到），求所有可能的原数组 a 的 mex 值的个数。a 是非负整数数组，m 是未知正整数且 $b_i = a_i \bmod m$。

Problem F - 进行一个数的数

- 由 $b_i = a_i \bmod m$ 可知 $m > \max(b)$，记 $B = \max(b)$。每个 a_i 可写为 $b_i + k_i m$（$k_i \geq 0$），即每个位置只能生成与其 b_i 模 m 同余的数。
- 设目标 mex 值为 t，则需 $0, 1, \ldots, t-1$ 都出现在 a 中且 t 不出现。由于 a 有 n 个位置，最多产生 n 个不同的数，故 $t \leq n$。
- 当 $m > t$ 时，所有小于 m 的数只能由 $k = 0$ 得到。此时 t 可行当且仅当 $\{0, 1, \ldots, t-1\} \subseteq \{b_i\}$。设 missing 是最小的不在 b 中的非负整数，则所有 $t \leq$ missing 均可行。
- 当 $m \leq t$ 时，只需考虑 $m = B + 1$ 的情形（其他 m 会引入坏余数，限制 $t \leq B + 1$ 且更小）。
- 对 $m = B + 1$ 暴力查找最大 mex 值，0 到该值之间的所有数均可成为答案。
- 时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

Problem L - 二人游戏

题目大意

给你 n 个正数，Alice 先手，Bob 后手。每次选择一个正数 x，将该数字变成 $x-1$，然后使所有大于 x 的数字变成 x。无法操作者输，问谁赢。

Problem L - 二人游戏

- 不关心元素顺序，记可重集为 A。
- 引理：若 $\exists x \in A$ 使得 $x-1 \in A$，且 A 中大于等于 x 的元素有奇数个，则 A 为先手必胜态。
- 证明：先手选择 x 后，设新状态为 A^*。
  - 若后手选择 $y < x$，后续状态为 G。若 G 是必胜态，则先手可直接选 y 使 $A \to G$ 获胜。
  - 若后手选择 x，则先手继续选 x，最终会选到最后一个 x。

Problem L - 二人游戏

- 若无法通过引理直接判断，令 S 为 A 中最大值。
- 先手选择 x（$1 < x \leq S$），则操作后大于等于 x 的数量必为偶数（否则由引理后手胜）。
- 考虑后手的应对：
  - 后手选 $y < x - 1$：若后续 G 是必胜态，先手可直接选 y 获胜。
  - 后手选 x：由引理先手获胜。
  - 后手选 $x - 1$：先手只能选 $x - 2$，如此反复直到出现引理中的先手必胜态。
- 最后判断先手选择 1 的情况，可简单判定胜负。
- 时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$。

Problem K - 股票交易

题目大意

给定股票在 n 个时间点的价格 $v_1, v_2, \ldots, v_n$。买入阈值 a 固定，每次询问给出一个卖出阈值 b。

机器人从前往后扫描价格：当 $v_i \le a$ 时买入一股；当 $v_i \ge b$ 且当前有持仓时卖出一股。最后如果还有股票没卖出，则全部按照 v_n 的价格强制卖出。对于每个询问 b，要求计算该策略的总收益。

Problem K - 股票交易

- 买入阈值 a 固定，故买入总金额可提前计算：

$$\text{buy} = \sum_{v_i \le a} v_i$$

- 将询问按 b 从小到大排序。随着 b 增大，满足 $v_i \ge b$ 的候选卖点只会减少。
- 先处理 $b = a + 1$ 的初始状态，然后在 b 增大的过程中删除不再满足条件（$v_i < b$）的位置。每个候选卖点最多被删除一次。

Problem K - 股票交易

候选卖点分两类：

- 真正发生过卖出的点；
- 因当时没有持仓而被跳过的点。

当 b 增大，删除位置 i：

- 若 i 是被跳过的卖点，未产生卖出金额，删除不影响收益。
- 若 i 是成交卖点，原本在 i 卖出的那股需继续向后寻找卖出位置。
- 后面已成交的卖点不受影响；真正变化的是 i 后面第一个因空仓被跳过的卖点。
- 若 i 后不存在这样的跳过点，则该股只能留到最后强制平仓。

可用 set 维护因空仓被跳过的点。复杂度 $O((n+m)\log n)$。

Problem H - 金银岛

题目大意

依次发生 n 个事件，事件有三种：

1. 获得一些金币：每枚金币可兑换 k 块钱，或换取一颗伤害为 k 的子弹；
2. 获得一些银币：每枚银币可兑换 1 块钱，或换取一颗伤害为 1 的子弹；
3. 出现一头血量为 x 的怪兽：必须立刻使用若干颗子弹攻击，要求总伤害 $\geq x$，否则被杀死。

求安全撤离时最多能剩余多少钱，若无法安全撤离输出 -1。

Problem H - 金银岛

- 不用区分子弹、钱和币，直接看作金币/银币造成伤害。
- 只有怪物出现时需要做决策。若伤害没溢出，用金币总是比银币优。
- 当一个怪物出现时：
  - 如果当前所有金币不会造成伤害溢出，就用完金币，再使用一些银币。
  - 否则，用金币直到再一枚就溢出，此时两种选择：
    1. 使用一些银币。
    2. 使用一枚金币。
- 假设总是使用策略 1，获得一个反悔机会：策略 1 用了 x 枚银币，若用策略 2（金币），相当于少一枚金币、多 x 枚银币，即一次用一枚金币换 x 枚银币的机会。
- 注意：只能使用更早的金币；机会总亏钱，尽量少用；x 越大越优；金币越晚越优。

Problem H - 金银岛

重新整理策略:

- 如果当前所有金币不会造成伤害溢出，就用完金币再加银币。银币不足则被杀死。
- 否则，用出现最晚的金币直到再用一枚就溢出，然后:
  - 令 x_0 是用了金币后还需要的银币数量, 用 x_0 枚银币，获得价值 x_0、出现于当前的机会。
  - 若银币变负，必须用一次机会。需要找到在前面有金币的前提下 x 最大的机会（刚获得一个机会，并且有金币剩余，所以必然存在)，再找比它更早且出现最晚的金币，用该金币换 x 枚银币（$x \geq x_0$，银币非负)。
- 答案 $=$ 剩余金币数 $\times k +$ 银币数。
- 实现：金币按时间查找、插入、删除，用 `map` 维护；机会需找 x 最大值并插入删除，用 `priority_queue` 维护。

Problem J - 宝石商人

题目大意

有 n 张卡牌按顺序排列的牌堆，每张牌有一种颜色，需要支付若干五种颜色的筹码才能兑换。已兑换的同颜色卡牌会提供折扣，每张已兑换的颜色 k 的卡牌可减少 1 个颜色 k 的筹码需求。桌面上始终展示牌堆顶的最多 4 张可兑换牌。

每回合可选择：拿 2 个同色筹码、拿 3 个异色筹码，或兑换桌面上的一张牌。兑换后清空筹码，从牌堆补一张新牌。目标为翻出所有牌（桌面可剩牌），求最少回合数。

$4 \leq n \leq 100, 1 \leq c_i \leq 5, 0 \leq p_{i,j} \leq 10^9$

Problem J - 宝石商人

- 每次兑换后筹码清空，故可将每次兑换看作独立阶段。
- 设 $f_{i,j,k,l}$ （$i > j > k > l$）表示已翻出前 i 张牌，桌面上四张牌编号为 i, j, k, l 时的最少回合数。
- 初始状态 $f_{4,3,2,1} = 0$。

兑换某张牌后补充第 $i + 1$ 张，转移为：

$$f_{i+1,i,j,k} \leftarrow f_{i,j,k,l} + \text{cost}(l)$$

$$f_{i+1,i,j,l} \leftarrow f_{i,j,k,l} + \text{cost}(k)$$

$$f_{i+1,i,k,l} \leftarrow f_{i,j,k,l} + \text{cost}(j)$$

$$f_{i+1,j,k,l} \leftarrow f_{i,j,k,l} + \text{cost}(i)$$

其中 $\text{cost}(x)$ 可通过颜色前缀和 $\mathcal{O}(1)$ 计算。当 $i = n$ 时牌堆已空，答案为所有 $f_{n,j,k,l}$ 的最小值。

Problem J - 宝石商人

- 将所需五种颜色筹码数从大到小排序为 $x_1 \geq \cdots \geq x_5$，记 $S = \sum x_i$。
- 每次操作有两种：
  - 选一个颜色，减少至多 2
  - 选至多三个不同颜色，各减少 1

最少操作次数 $g(x) = \max\left(\left\lceil \frac{S}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{x_1+x_2}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{S+x_1}{4} \right\rceil\right)$，
$\text{cost}(x) = g(x) + 1$。
后文定义 T 为最小操作次数。
下界证明：

- 一次操作最多使 S 减 3，故 $S \leq 3T$，至少 $\lceil S/3 \rceil$ 次。
- 对 x_1, x_2 总减少量最多 2，故 $x_1 + x_2 \leq 2T$，至少 $\lceil (x_1 + x_2)/2 \rceil$ 次。
- 考虑 $W = S + x_1$，一次操作使 W 最多减 4，故 $S + x_1 \leq 4T$，至少 $\lceil (S + x_1)/4 \rceil$ 次。

Problem J - 宝石商人

引理：每次选至多 3 个不同位置各减 1，q 次将非负整数序列减到 0 的充要条件是 $\max x_i \le q$ 且 $\sum x_i \le 3q$。
可达性证明：由 T 定义有 $S \le 3T$、$x_1 + x_2 \le 2T$、$S + x_1 \le 4T$。

- 若 $x_1 \le T$：所有数 $\le T$，$S \le 3T$，由引理可 T 次完成。
- 若 $x_1 > T$：令 $d = x_1 - T$，先对 x_1 做 d 次减 2。剩余 $q = 2T - x_1$ 次，此时 x_1 剩 q，$x_2 \le q$，总和 $\le 3q$，由引理可在 q 次内完成。

当然这题也有其他的一些方法求解花费，比如可以观察到最多只有最大的两个颜色可能使用 -2，因为三个颜色分别 -2 一定不如做两次选三个颜色 -1。然后考虑最大和次大值做 -2 操作，做多少次会使得 $(\frac{\sum x_i}{3}, \max x_i)$ 两者的选择发生变化，可以通过数学方法 $O(1)$ 计算得到答案。
总时间复杂度 $\mathcal{O}(n^4)$。

Problem E - 高维几何

题目大意

有一张无向简单图，点数为 2^n。每次可以询问一个黑白染色（黑点和白点各 2^{n-1} 个），交互器返回至少有一个端点为黑色的边数。要求在不超过 2^{n+1} 次询问内求出整张图的边数。

Problem E - 高维几何

本题构造方案很多，这里给出其中一种。

- 令 $N = 2^n$，把点看成 $\mathbb{F}_2^n$ 中的向量，颜色记为 $+1/-1$，其中黑色为 $+1$，白色为 -1。
- 对每个非零向量 $a \in \mathbb{F}_2^n$，构造染色 $x_a(v) = (-1)^{a \cdot v}$。因 $a \neq 0$ 时线性函数 $a \cdot v$ 的 $0/1$ 取值各有 $N/2$ 个，这是合法的对半染色。
- 对每个 $a \neq 0$，同时询问 x_a 和它的反色 $-x_a$，总询问次数为 $2(N-1) \leq 2N$。

Problem E - 高维几何

- 一次染色 x 下，一条边 uv 被计入，当且仅当不是两个端点都为白色。用 $+1/-1$ 表示后，这条边的贡献为：

$$\frac{3 + x_u + x_v - x_u x_v}{4}$$

- 把 x_a 和 $-x_a$ 成对询问时，一次项 $x_u + x_v$ 会抵消。另一方面，对任意不同点 $u \neq v$：

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{a \cdot (u+v)} = 0$$

去掉 $a = 0$ 的贡献后得到 $\sum_{a \neq 0} x_a(u) x_a(v) = -1$。

- 正反两种染色都算上，因此任意一条边在所有询问中的二次项总和为 -2。

Problem E - 高维几何

- 设所有询问返回值之和为 T，询问次数 $k = 2(N-1)$，图中边数为 m。对所有边累加贡献，有

$$T = \frac{3km - (-2m)}{4} = \frac{3(2N-2)m + 2m}{4} = \frac{(3N-2)m}{2}$$

- 所以最终答案就是 $m = \dfrac{2T}{3N-2}$，其中 $N = 2^n$。
- 实现时枚举 `mask`=1..N-1，第 v 个点的颜色由 `popcount(mask & v) mod 2` 决定，再询问它和反色并累加返回值即可。
- 复杂度为生成询问 $\mathcal{O}(N^2)$，询问次数 $2N-2$，符合要求。

Problem D - 括号凸包

题目大意

给定二维平面上的 n 个点，每个点标有左括号或右括号。需要选出一组点构成凸多边形，使得从任意左括号点出发按凸多边形顺序得到的括号序列均为合法括号序列。保证不存在三点共线，$n \leq 2000$。

Problem D - 括号凸包

- 结论：若存在合法解，则一定存在只包含四个点、按凸多边形顺序为 ()() 的解。
- 原因：对于任意合法解，其括号序列必为合法括号序列。可在凸多边形点集中选出四个按顺序为 ()() 的点，它们仍是原凸多边形上的点，构成凸四边形且满足要求。
- 问题转化为：找到四个点构成凸四边形，按凸包顺序为 ()()。

由于保证不存在三点共线，等价于：找到一条连接两个左括号点的线段和一条连接两个右括号点的线段，使两者相交。

Problem D - 括号凸包

称括号类型不同的点为异色点，相同的点为同色点。
先将所有点按 x 坐标排序（若 x 相同可旋转坐标处理），从左到右枚举每个点 i 作为右端点。

- 取 i 左侧所有与 i 异色的点，维护凸包 A。
- 枚举 i 左侧与 i 同色的点 j，判断线段 ij 是否与凸包 A 的某条边相交。若相交，则存在异色线段与 ij 相交，即找到满足条件的四点解。

具体实现：求凸包 A 上所有点相对于 i 的斜率，每条凸包边对应一个斜率区间，排序后二分找到 ij 斜率所在区间，再判断是否真正相交。
时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2 \log n)$。Bonus：本题存在 $\mathcal{O}(n \log n)$ 做法。

Problem G - 传球谜题

题目大意

有 n 名球员和一名守门员。守门员等概率把球交给一名球员。球员 i 按概率 $p_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\sum_k a_{i,k}}$ 把球传给球员 j。每名球员传球次数只看奇偶性。若所有球员传球次数均为偶数，则球回到守门员并结束。求结束前总传球次数的期望，若发散输出 `infinity`，否则输出模 998244353 的答案。

Problem G - 传球谜题

- 用 n 位二进制数 S 表示当前奇偶状态，第 i 位为 1 表示球员 i 已传奇数次球。初始状态为 0（全偶数）。
- 把问题看成「奇偶状态第一次回到全 0 的时间」。设当前球员 i 要传球，奇偶状态为 S：
  - 若 $S = 2^i$（即只有 i 传了奇数次），则 i 传完这一脚后全体变偶数，过程结束。
  - 否则 i 传完后状态变为 $S \oplus 2^i$，再按概率 $p_{i,j}$ 将球传给球员 j。
- 守门员等概率开球，即从 n 个初始状态 $(0, i)$ 等概率开始。

Problem G - 传球谜题

判定发散：

- 以 (S, i) 为状态建可达图。从 $(0, i)$ 出发，若当前状态不是 $S = 2^i$，就连到所有 $(S \oplus 2^i, j)$ 其中 $a_{i,j} > 0$。
- 若可达图中存在不含终止出口的底部强连通分量，则期望发散。

有限时的计算：

- 先不考虑过程结束，统计所有回到全 0 状态的情形（不限于第一次）。
- 设 $A_k[i][j]$ 表示从 $(0, i)$ 出发经过 k 次传球后奇偶状态再次为 0 且下次该 j 传球的概率。
- 定义生成函数 $A(z) = \sum_{k \geq 0} A_k z^k$。

Problem G - 传球谜题

- 用 Walsh 变换消去 2^n 个奇偶状态。对每个 $T \subseteq [n]$，设对角阵 D_T 满足 $(D_T)_{ii} = (-1)^{[i \in T]}$，$M_T = D_T P$。
- 由正交性可得 $A(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{T \subseteq [n]} (I - zM_T)^{-1}$。
- 令 $F(z)$ 为首次回到全 0 的生成函数，即 $F_{ij}(z)$ 表示从球员 i 出发首次回到全 0 且下次由 j 传球的生成函数。所有回到全 0 的情形可拆成首次回到 0 再接一段回到 0，故 $A(z) = I + F(z)A(z)$，即 $F(z) = I - A(z)^{-1}$。
- 从球员 i 出发的传球次数生成函数为 $F(z)\mathbf{1}$ 的第 i 个分量 $(F(z)\mathbf{1})_i = \sum_j F_{ij}(z)$，期望即该函数在 $z = 1$ 处的导数值。
- 设 $w = 1 - z$，在 $z = 1$ 附近展开 $(I - zM_T)^{-1}$。若 $I - M_T$ 可逆则 Taylor 展开；否则 $z = 1$ 是极点，需 Laurent 展开，结果含负幂项。

Problem G - 传球谜题

- 对所有 T 求和得 $\widetilde{A}(1-w)=\sum_{p=-K}^{0} C_p w^p + O(w)$，$K \le n$，$C_p$ 为各 T 展开系数之和。
- 设 $\widetilde{A}^{-1}\mathbf{1} = x_1 w + \cdots + x_{K+1} w^{K+1} + O(w^{K+2})$，代入 $\widetilde{A}(\widetilde{A}^{-1}\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ 比较系数得

$$\sum_{p=-K}^{0} C_p\, x_{t-p} = \begin{cases} \mathbf{1}, & t=0 \\ \mathbf{0}, & t \ne 0 \end{cases}$$

  $(1 \le t-p \le K+1)$，解出 x_1。
- 答案为 $\frac{2^n}{n}\sum_i (x_1)_i$。
- 时间复杂度为 $\mathcal{O}(2^n n^3)$。